

2 n を 1 以上の整数とする . 区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な関数 $f(x)$ が , 整数 $k = 0, 1, \dots, n - 1$ に対して , 次を満たしているものとする .

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = 0$$

(1) t が実数全体を動くときの $g(t) = \int_0^1 |x - t|^n dx$ の最小値と , それを与える t の値を求めよ .

(2) すべての実数 t に対して , 次の等式が成り立つことを示せ .

$$\int_0^1 (x - t)^n f(x) dx = \int_0^1 x^n f(x) dx$$

(3) 関数 $|f(x)|$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を M とするとき

$$\left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2^n(n+1)} \text{ を示せ .}$$