2 n を 2 以上の自然数とする．平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$，$OA_1 = 1$，$A_1A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする．A_2 から OA_1 へ垂線をおろし，交点を A_3 とする．A_3 から OA_2 へ垂線をおろし，交点を A_4 とする．以下同様に，$k = 4, 5, \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし，交点を A_{k+1} として，順番に $A_5, A_6, \cdots$ を定める．

$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $k = 1, 2, \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．ここで、自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい．