

4 四面体 $ABCD$ において，辺 AB の中点を M ，辺 CD の中点を N とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか．証明をつけて答えよ．
- (2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ．
- (3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ．
- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ．