

4 多項式  $P(x)$  を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし,  $i$  は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$  とするとき, 係数  $a_0, \dots, a_7$  をすべて求めよ。

(2)  $0 < \theta < \pi$  に対して,

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (1) で求めた  $a_1, a_3, a_5, a_7$  を用いて, 多項式  $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$  を考える。  $\theta = \frac{\pi}{7}$  として,  $k = 1, 2, 3$  について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき,  $Q(x_k) = 0$  が成り立つことを示し,  $x_1 + x_2 + x_3$  の値を求めよ。