

6 正の整数 m, n に対して実数 $A(m, n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

(2) $A(m, 1)$ を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

(4) m または n が奇数ならば, $A(m, n)$ は有理数であることを示せ。