4　n を正の整数とする。2 つの整数 $a_n,\ b_n$ を条件

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める。ここで，$\sqrt{2}$ は無理数なので，このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定まる。

(1)　$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ を用いてそれぞれ表せ。さらに，$b_4,\ b_5,\ b_6$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　等式

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて表せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2$ を求めよ。

(4)　$pb_6 - qb_5 = 1$，$0 \leqq p \leqq 100$，$0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ。