

4 $0 \leq a < 1$ を満たす実数 a に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 3 \left[a_n + \frac{1}{2} \right] - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

という漸化式で定める。ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。以下の問に答えよ。

- (1) a が $0 \leq a < 1$ の範囲を動くとき, 点 $(x, y) = (a_1, a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。
- (2) $a_n - [a_n] \geq \frac{1}{2}$ ならば, $a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。
- (3) $a_n > a_{n+1}$ ならば, $a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ。
- (4) ある 2 以上の自然数 k に対して, $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ が成り立つとする。このとき a_k を a の式で表せ。