

4 関数  $f(x)$  は区間  $x \geq 0$  において連続な増加関数で  $f(0) = 1$  を満たすとする。ただし  $f(x)$  が区間  $x \geq 0$  における増加関数であるとは、区間内の任意の実数  $x_1, x_2$  に対し  $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) < f(x_2)$  が成り立つときをいう。以下、 $n$  は正の整数とする。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx = \infty$  を示せ。

(2) 区間  $y > 2$  において関数  $F_n(y)$  を  $F_n(y) = \int_{2 + \frac{1}{n}}^y \frac{f(x)}{x - 2} dx$  と定めるとき、  
 $\lim_{y \rightarrow \infty} F_n(y) = \infty$  を示せ。また  $2 + \frac{1}{n}$  より大きい実数  $a_n$  で

$$\int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx + \int_{2 + \frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2 - x} dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (2) の  $a_n$  について、不等式  $a_n < 4$  がすべての  $n$  に対して成り立つことを示せ。