

4 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を  $n$  回行うとき、赤玉を  $k$  回以上取り出す確率を  $f(k)$  とおく。

(1)  $n \geq 2$  に対して、 $f(1)$  と  $f(2)$  を求めよ。

(2)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

を示せ。

(3) 自然数  $k$  に対して、定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$$

を求めよ。