

5 関数列 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ を次のように作る。

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = 1 + \int_0^x \{f_0(t) + tf_0'(t)\}dt,$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x \{f_1(t) + tf_1'(t)\}dt,$$

.....

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x \{f_{n-1}(t) + tf_{n-1}'(t)\}dt,$$

.....

このとき

- (1) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を計算せよ。
- (2) $f_n(x)$ の一般形を, 数学的帰納法により求めよ。
- (3) $|x| < 1$ なるとき, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求め, かつ $f'(x) = \{f(x)\}^2$ が成り立つことを示せ。