

5  $x \geq 0$  で定義された微分可能な関数  $y = f(x)$  のグラフ  $C$  は、上に凸であって、 $f(0) \geq 0$  とする。グラフ  $C$  上に定点  $A(\alpha, f(\alpha))$  と点  $P(x, f(x))$  ( $x > \alpha$ ) をとるとき、原点  $O$  と  $A, P$  を結ぶ線分  $OA, OP$  とグラフ  $C$  とによって囲まれる部分の面積を  $S(x)$  とするとき、次の (1), (2), (3) に答えよ。

(1)  $S(x)$  を定積分  $\int_{\alpha}^x f(t)dt$  と  $x, f(x), \alpha, f(\alpha)$  とで表せ。

(2)  $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $a, b > 0$ ) の場合に、変数  $x$  を  $x = a \sin \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ) とおいて、面積  $S(x)$  の  $\theta$  に関する変化率を求めよ。

(3)  $\alpha = 0$  のとき、 $S(x) = x^3 \log(x+1)$  になる  $f(x)$  を  $f(x) = xg(x)$  とおいて求めよ。