

3 行列 $A(n) = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ ($n > 0$) で表される 1 次変換によって、任意の平面ベクトル \vec{x} ($\vec{x} \neq \vec{0}$) は、大きさが $|\vec{x}|$ の n 倍であるベクトルに移るとする。

(1) $a_n^2 + b_n^2$ の値を n で表し、逆行列 $A(n)^{-1}$ を求めよ。

(2) $A(n)A(m) = A(m)A(n)$ を示せ。

(3) 任意のベクトル \vec{x} にたいし、 $A(1)^3 \vec{x} = \vec{x}$ を満たす行列 $A(1)$ をすべて求めよ。

(4) $A(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、 $A(2)^7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および $(A(2)^{-1})^{15} A(2)^8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。