

3 次図のように， xy -平面の x 軸上に底辺があり，曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上に頂点がある正三角形が隣接しながら無限に並んでおり，その最左端の頂点は原点であるとする．そして，左から n 番目の正三角形の辺の長さは $2a_n$ であるとし， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする．

(1) a_{n+1} と S_n の関係を求めよ．

(2) $S_n = a\sqrt{n}$ であることを証明せよ．ただし， a は $a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす正の数である．

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n$ を求めよ．