

1 以下において、 $f(x)$  はすべての実数  $x$  において微分可能な関数とし、  
 $F(x) = e^x f(x)$  とおく。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

(1) 定数関数でない関数  $f(x)$  で

条件 (A) 「すべての  $x$  に対して  $f(x+1) = f(x)$  である」

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数  $f(x)$  が

条件 (B) 「すべての  $x$  に対して  $f'(x) + f(x) \leq 0$  である」

をみたすとき、 $a < b$  ならば  $F(a) \geq F(b)$  であることを示せ。

(3) 関数  $f(x)$  が (1) の条件 (A) をみたすとき、 $F(x+n)$  (ただし、 $n$  は正の整数) を  
 $F(x)$  を用いて表せ。

(4) 関数  $f(x)$  が (1)、(2) の条件 (A)、(B) をともにみたすとする。

①  $f(c) \geq 0$  となる  $c$  が存在すれば、 $f(c) = 0$  であることを示せ。

② ある  $c$  で  $f(c) = 0$  であれば、すべての  $x$  で  $f(x) = 0$  となることを示せ。