

2 正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す. ただし, 1 および a 自身も約数とする. たとえば, $f(1) = 1$ であり, $a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので, $f(15) = 24$ となる. 次の問いに答えよ.

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする. このとき

$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ. 必要ならば

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$
 を用いてよい.

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする. このとき

$f(a) \geq (p+1)q$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは, $q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ.

(3) $a = 2^2 r$, $b = 2^4 s$ (r, s は正の奇数) の形をした偶数 a, b を考える. $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$ をみたす a, b を求めよ.