

5 実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき, xy 平面上で点 $P(t^2, e^{-t})$ が描く曲線を C とする. a を正の実数とし, 曲線 C と x 軸, y 軸, および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ.

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形を描け. ただし, $\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい.

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ. ただし, 必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい.