

1 次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること、また、 e は自然定数の底で、 $e < 3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して、方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき、 $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$ 、 $ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ。