

### 3 関数

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ |x \log |x|| & (x < 0) \end{cases}$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $t \geq 0$  のとき、不等式  $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$  が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  と  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  を証明せよ。
- (3)  $a$  を実数の定数とすると、 $x$  についての方程式  $f(x) = a$  の異なる実数解の個数を求めよ。
- (4)  $S = \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 |f(x)| dx$  の値を求めよ。