

1 $a > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ として、以下の問いに答えよ。

(1) 初項 $a_1 = a$ と漸化式

$$a_{n+1} = \alpha a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、

$$x_n = \log_{10} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を n, α, a を用いて表せ。

(2) 初項 $b_1 = b$ と漸化式

$$b_{n+1} = \beta b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、

$$y_n = \log_{10} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{y_n\}$ の一般項を n, β, b を用いて表せ。

(3) $a = b = 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = 0$$

を証明せよ。