

4 数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_c^1 nx^{n-1} \left(\log \left(\frac{1}{x} \right) \right)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし, c は $0 < c < 1$ を満たす定数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 および第 2 項 a_2 を求めよ。
- (2) $0 < x \leq 1$ のとき, $0 \leq x \log \left(\frac{1}{x} \right) < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $a_n < \frac{n}{2^n} \log \left(\frac{1}{c} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。