

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して、 xy 平面上の点 (a_n, b_n) が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ の上にあることを証明せよ。

(2) r, s, t は正の実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする。

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき、 r, s, t を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。