

4 α を $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし, 数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & (\theta_n \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \theta_n - \alpha & (\theta_n > \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) x_3 が最大となる α を求めよ。
- (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が最大となる α と, その極限值を求めよ。