

3 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について, $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを, それぞれ A, B, C とする。 $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を O とし, 外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を, それぞれ AD, OE とする。このとき,

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。

(3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし, さらに OG が BC と平行であるとする。このとき,

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ。