

5 すべての実数 x について、関数 $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ が微分可能であり、 $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ が満たされるとする。また、 $f(-2) < 0$ かつ $f(2) > 0$ であるとし、 $f(x) = 0$ の解を a とする。 $f(x)$ を用いて、数列 $\{x_n\}$ を次のように定義する。

$$x_1 = 2$$

x_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) は、曲線 $y = f(x)$ の $x = x_{n-1}$ における接線と x 軸との交点の x 座標とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $x_n > a$ ならば以下の不等式が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ。

$$f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} < f'(x_n)$$

(2) $x_n > a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となることを示せ。