

4 数列 $\{x_n\}$ の第 n 項を $x_n = r^{n-1}$ で定める。このとき、正の実数 x に対して定義された関数 $f(x) = x^{-\alpha}$ を用いて、2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を、それぞれ $a_n = f(x_n)(x_{n+1} - x_n)$ と $b_n = f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)$ で定める。ただし、 α は正の定数、 r は 1 より大きい実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) α の値に応じて級数 $a(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束、発散を調べ、収束するときは和を求めよ。

(2) α の値に応じて級数 $b(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束、発散を調べ、収束するときは和を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{r \rightarrow 1+0} a(r)$ と $\lim_{r \rightarrow 1+0} b(r)$ のそれぞれについて、極限が有限な値である場合、その値を求めよ。