4 正の実数 a，b に対して $A(a,\,b)=\dfrac{a+b}{2}$，$G(a,\,b)=\sqrt{ab}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\min(a,\,b) \leqq G(a,\,b) \leqq A(a,\,b) \leqq \max(a,\,b)$ が成り立つことを示せ。

ただし，$\min(a,\,b)$ は a，b のうちの最小の数を表し，$\max(a,\,b)$ は a，b のうち最大の数を表す ($a=b$ の場合は a，b のうちのどちらかの数を表すとする)。

(2) $a>b$，$a_0=a$，$b_0=b$ として，以下の数列を定義する。

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad c_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2},\quad n=0,\,1,\,2,\,\cdots$$

このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値 (α とする) に収束することを示せ。

(3) a_{n+2} を a_n と b_n を用いて表せ。ただし $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は (2) で定義した数列とする。

(4) c_{n+2} と c_{n+1} の間に以下の関係が成り立つことを示せ。ただし，$\{c_n\}$ と α はそれぞれ (2) で定義した数列と極限値とする。

$$c_{n+2}<\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}c_{n+1}\right)^2$$