

1 次で定義される数列 $\{I_n\}$ を考える。

$$I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 数列 $\{I_n\}$ が次の式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) $\frac{d}{dx} (\cos x \sin^{n-1} x)$ を $\sin x$ と n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{I_n\}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(5) 数列 $\{I_n\}$ の一般項を求めよ。