

3 以下の問いに答えよ。

(1) 平面上の2点 P, Q の座標をそれぞれ $(a, b), (c, d)$ とし, O を原点とする。また, 複素数 α, β を $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と定める。このとき, ベクトル \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は $\frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2}$ に等しいことを示せ。ただし, i は虚数単位, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は, それぞれ, α, β の共役な複素数である。

(2) 原点 O を中心とする半径1の円を単位円という。単位円に内接する正 n 角形 ($n \geq 3$) の頂点を P_0, P_1, \dots, P_{n-1} とする。このとき, 単位円上の点 A に対して,

$$S_p = (\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OA})^p + (\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OA})^p + \dots + (\overrightarrow{OP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{OA})^p$$

とする。ただし, p は $0 < p < n$ を満たす整数とする。

(a) $S_1 = 0$ が成り立つことを示せ。

(b) $S_2 = \frac{n}{2}$ が成り立つことを示せ。

(c) S_p の値は点 A によらないことを示せ。