

4 a を自然数とする。

(1) すべての自然数 n について、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+a-1) = \frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2) $a \geq 2$ のとき、次の等式が、すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ。

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)} + \frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)} = \frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3) 級数の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について、収束するならばその極限值を求め、発散するならばこれを証明せよ。