

3 正の定数 r に対して座標空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(r, 0, 0)$, $B(0, r, 0)$ を定める。また, 平面 $y = \frac{1}{2}r$ 上の点 C に対して, 線分 AC の中点を P とする。ただし, 点 C の z 座標は正である。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q は線分 OB 上の点とする。定数 a, c に対し, 点 C を位置 $\left(a, \frac{1}{2}r, c\right)$ に固定したとき, $|\overrightarrow{PQ}|$ を最小とする点 Q の座標を求めよ。また, このときの $|\overrightarrow{PQ}|$ を求めよ。
- (2) (1) で求めた点 Q に対して, \overrightarrow{PQ} と \overrightarrow{OQ} のなす角が 90° であることを示せ。
- (3) 点 C は $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}|$ を満たしながら動くとする。(1) で求めた点 Q と 3 点 O, C, P を頂点とする四面体の体積が最大となる点 C の座標と, そのときの四面体 $OCPQ$ の体積を求めよ。