

5 $f(x)$ を次の条件を満たす 3 次多項式とする。

(a) x^3 の係数は 1 である。

(b) $0, 1, -1$ ではない複素数 ω が存在して、すべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ となる

以下の問いに答えよ。

(1) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ または $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることを示せ。ただし、 i は虚数単位とする。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $g(x)$ を次の多項式とする。

$$g(x) = \sum_{n=0}^{2021} x^n = x^{2021} + x^{2020} + \cdots + 1$$

$g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。