

4 ω を $x^3 = 1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で4つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより、複素数の列 z_1, z_2, z_3, \dots を定める。

$z_1 = 0$ とする。

z_k まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。

$z_k = 0$ のとき、 $z_{k+1} = \omega^t$ とする。

$z_k \neq 0, t = 1, 2$ のとき、 $z_{k+1} = 0$ とする。

$z_k \neq 0, t = 3$ のとき、 $z_{k+1} = \omega z_k$ とする。

$z_k \neq 0, t = 4$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$ とする。

$z_k \neq 0, t = 5$ のとき、 $z_{k+1} = z_k$ とする。

$z_k \neq 0, t = 6$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し、 \bar{z} は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 = \bar{\omega}$ となることを示せ。
- (2) $z_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。
- (3) $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4) $z_n = 1$ となる確率を n の式で表せ。