

3 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して, $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{q} に対して, 次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての \vec{q} に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下, $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル \vec{v}, \vec{w} で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし, x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル \vec{q} に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。