4　以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A)　すべての x，y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B)　すべての x，y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C)　$f(0)\neq 0$

(D)　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ がわかる。以上のことから②$f(x)$，$g(x)$ はすべての x の値で微分可能で，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立することが示される。③上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)'　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)' を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に

おきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) =$[　ア　]，$g(x) =$[　イ　] が得られる。

(1)　下線部①について，$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ となることを示せ。

(2)　下線部②について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，

　$f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。

(3)　下線部③について，下線部①，下線部②の事実を用いることにより，

　$\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。

(4)　下線部④について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

　(B)　すべての x，y について $q(x + y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

　(D)　$p(x)$，$q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0$，$q'(0) = 1$

　を満たすことを示せ。また空欄 [　ア　]，[　イ　] に入る関数を求めよ。