

2  $n$  を 1 以上の整数とする . 区間  $0 \leq x \leq 1$  で連続な関数  $f(x)$  が , 整数  $k = 0, 1, \dots, n-1$  に対して , 次を満たしているものとする .

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = 0$$

(1)  $t$  が実数全体を動くときの  $g(t) = \int_0^1 |x-t|^n dx$  の最小値と , それを与える  $t$  の値を求めよ .

(2) すべての実数  $t$  に対して , 次の等式が成り立つことを示せ .

$$\int_0^1 (x-t)^n f(x) dx = \int_0^1 x^n f(x) dx$$

(3) 関数  $|f(x)|$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最大値を  $M$  とするとき

$$\left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2^n(n+1)} \text{ を示せ .}$$