

1 下図に示すように、 $y$  軸上の点  $A(0, a)$  に中心を持つ半径  $a$  ( $> 0$ ) の円  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$  がある。この円の  $|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$  を満たす円弧  $BC$  に、直線  $y = a$  上の  $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$  を満たす任意の点  $P(t, a)$  から  $y$  軸に平行に円弧に下ろした直線が円弧  $BC$  と交わる点を  $Q$  とする。つぎに、線分  $QA$  に関して  $\angle PQA = \angle AQS$  となるように点  $Q$  から引いた直線と  $y$  軸との交点を  $S(0, s)$  とする。

つぎの問に答えよ。

(1) 点  $S$  の  $y$  座標  $s$  を  $t$  の関数として導け。

(2) 前問において  $X = \frac{t}{a}$ ,  $Y = \frac{a}{a-s}$  とおく。  $X$  と  $Y$  の関係を求めよ。

また、点  $P$  の  $x$  座標  $t$  を  $0 < |t| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$  の範囲で変化させたとき、点  $(X, Y)$  が描く軌跡を図示せよ。

(3) 線分  $PQ$  と線分  $QS$  の長さの和を  $L$  とする。  $L$  の最小値を与える  $t$  の値とそのときの  $L$  の値を求めよ。