

4 (b) $M = \{1, 2, \dots, n\}$ を 1 から n までの自然数の集合, f を M から M への写像とし,

$$f_1 = f, \quad f_2 = f \circ f_1 = f \circ f, \quad f_3 = f \circ f_2 = f \circ f \circ f, \quad \dots, \quad$$

$$f_k = f \circ f_{k-1} = f \circ f \circ \dots \circ f (k \text{ 個の合成}), \quad \dots$$

とする. 次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $1, 2, \dots, n, n+1$ の中から異なる 2 つの p, q を選び, $f_p(1) = f_q(1)$ とすることができる.

(2) $f_1(1), f_2(1), \dots, f_n(1)$ がすべて互いに異なるならば, $f_n(1) = 1$ である.