

3 座標平面上において、点 P と点 Q は時刻 0 から π まで、次の条件にしたがって動く。

点 P は点 $A(-1, 0)$ を出発し、原点 O を中心とする半径 1 の円周上を時計回りに動く。
ただし、時刻 t で P は $\angle POA = t$ ($0 \leq t \leq \pi$) をみたす。点 P を通り x 軸に垂直な直線が直線 $y = -1$ と交わる点を H とする。

点 Q は P の回りを反時計回りに

$$PQ = t \quad (0 \leq t \leq \pi) \quad \text{および} \quad \angle HPQ = t \quad (0 < t \leq \pi)$$

をみたすように動く。時刻 π における Q の位置を B とする。次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t における Q の座標を (x, y) とする。 x と y を t で表し、 y は t について単調に増加することを示せ。
- (2) 時刻 $\frac{j\pi}{6}$ と $\frac{(j+1)\pi}{6}$ の間で Q の x 座標が最大値をとるように整数 j を定めよ。
- (3) 点 A を通り y 軸に平行な直線、点 B を通り x 軸に平行な直線、および Q の軌跡で囲まれた部分の面積 S を求めよ。