

4 π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin \pi t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2I_2 + \dots + u^nI_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0, I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう． π が無理数でないとし，正の整数 p, q によって $\pi = \frac{p}{q}$ として表されると仮定する． $A_0 = I_0, A_n = p^n I_n$ とおくとき， A_0, A_1, A_2, \dots は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．