

3 媒介変数 t によって

$$x = \cos t, \quad y = \cos nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線を $y = f_n(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) とする．ただし, n は自然数である．

- (1) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ．
- (2) $n \geq 2$ のとき $f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$ を示せ．
- (3) $\cos \frac{\pi}{4n}$ は無理数であることを示せ．ただし, $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明なしで用いてよい．