

4 (a) 辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき, 線分 OA を $m:n$ に内分する点を P , 線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q , 線分 CO を $m:n$ に内分する点を R , 線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする. (ただし, $m, n > 0$ とする.)

(1) (i) \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{RS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ.

(ii) \vec{a} と \vec{b} の内積を求めよ.

(iii) \overrightarrow{PQ} と \overrightarrow{RS} が垂直かどうかを調べよ.

(2) (i) $m = n$ のとき点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ.

(ii) このとき PQ, RS の交点を G として, \overrightarrow{OG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ.

(iii) G は正四面体 $OABC$ に外接する球の中心であることを示し, その球の半径を求めよ.