

4 (a) 関数 $f(x) = 1 - x^2$ について, 次の間に答えよ.

(1) $f(a) = a$ をみたす正の実数 a を求めよ.

(2) a を (1) で求めた実数とする. $x \geq \frac{1}{2}$ ならば, $|f(x) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}|x - a|$ となることを示せ.

(3) a を (1) で求めた実数とする. $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1$ として,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える. すべての n に対して $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ がなりたつならば, $x_1 = a$ であることを示せ.