

5 (a) 平面上の点 P の x 座標と y 座標が、変数 θ の関数 $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$ を用いて、

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

と表されている． θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で変化したとき、点 P が描く曲線を C とする．

点 P を $P(\theta)$ で表し、 $P_1 = P(0)$ 、 $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $P_3 = P(\pi)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする．このとき、点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし楕円の上でない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ．

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする． l の方程式を求めよ．

(3) 次の条件 (i)(ii)(iii) をみたす楕円 D を考える．

(i) D の軸の 1 つは x 軸上にある．

(ii) D は点 P_1 , P_2 を通る．

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である．

このとき、点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ．