京大理系　1962前期　⑤

(イ) $f'(x)=\sqrt{2}a\pi-\sin\pi x\cdot\pi+\cos\pi x\cdot\pi=\sqrt{2}a\pi-\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\pi x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\pi x\right)$

$=\sqrt{2}a\pi-\sqrt{2}\pi\sin\left(\pi x+\frac{7}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\pi\left\{a-\sin\left(\pi x+\frac{7}{4}\pi\right)\right\}$

※ $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たすθとして $\theta=\frac{7}{4}\pi$ がある.

$f(x)$が極値をもつためには

$f'(x)=0$ であり, この前後で$f'(x)$の符号が変わるような xが存在すればよいから,

$a<1$ であればよい.

(ロ) $\sin\pi\left(x+\frac{7}{4}\right)=a$, $-\frac{7}{4}<x<\frac{1}{4}$ を満たすxは 2つ存在するから, これを α, β $(\alpha<\beta)$ とする.

$x=\alpha$の前後で $f'(x)$の符号は正から負に変わるから $f(x)$は $x=\alpha$ で極大値をとる.

$x=\beta$の前後で $f'(x)$の符号は負から正に変わるから $f(x)$ は $x=\beta$で極小値をとる.

ところで, 3角関数の周期性より, $f(x)$は $x=\alpha+2m$ $(m=0, \pm1, \pm2\cdots)$ で極大値をとる.

$f(\alpha+2m)=\sqrt{2}a\pi(\alpha+2m)+\cos\pi(\alpha+2m)+\sin\pi(\alpha+2m)$

$=\sqrt{2}a\pi\alpha+2\sqrt{2}a\pi m+\cos\pi\alpha+\sin\pi\alpha$

$f(x)$が極大値をとる点は $(2m+\alpha, 2\sqrt{2}a\pi m+\sqrt{2}a\pi\alpha+\cos\pi\alpha+\sin\pi\alpha)$ であるから,

これは直線, $y-\sqrt{2}a\pi\alpha-\cos\pi\alpha-\sin\pi\alpha=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}a\pi}{\cancel{2}}(x-\alpha)$

$y=\sqrt{2}a\pi x+\sin\pi\alpha+\cos\pi\alpha$, 上に等間隔に並んでいる.