京大理系　1963前期　(6)

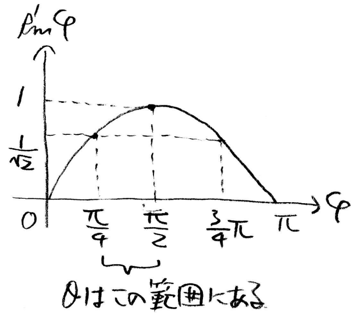
$\int_0^x \cos t\,dt=\left[\sin t\right]_0^x=\sin x$　,　$\int_0^x \sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_0^x=-\cos x+1$

$f(x)=\sin x+2\cos x-2=\sqrt{5}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-2=\sqrt{5}\sin(x+\theta)-2$　$\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$とする

θは、$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$、$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$、$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす値

$\sin\theta>0$、$\cos\theta>0$ より $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

さらに $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}<1$ より $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$



左図より、$f(x)$の最小値は $x=0$のとき、または $x=\frac{\pi}{4}$のとき.

$f(0)=\sqrt{5}\sin\theta-2=0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2=\sqrt{5}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)-2$

$=\cancel{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2=\frac{3}{\sqrt{2}}-2>0$.

よって $f(x)>0$ であるから題意は示された.