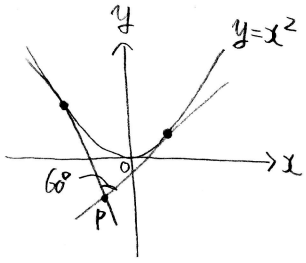
京大理系　1964前期　④



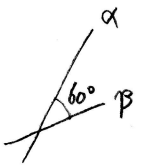
(X,Y)を通り傾きがkの直線の方程式は $y-Y=k(x-X)$

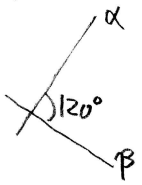
この放物線に接するには、$kx-kX+Y=x^2$、$x^2-kx+kX-Y=0$ が重解を持てばよく、

$k^2-4(kX-Y)=0$、$k^2-4Xk+4Y=0$、$k=2X\pm\sqrt{4X^2-4Y}=2X\pm2\sqrt{X^2-Y}$ より

$X^2-Y\geqq0$、$k=2X\pm2\sqrt{X^2-Y}$ であればよい。

kは2つ存在しなければいけないから、$X^2-Y>0$ であればよい。





$\tan60°=\sqrt3$、$\tan120°=-\sqrt3$ であるから、

$\tan\alpha=2X+2\sqrt{X^2-Y}$、$\tan\beta=2X-2\sqrt{X^2-Y}$ として、

$\tan(\alpha-\beta)=\pm\sqrt3$ であればよい。

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4\sqrt{X^2-Y}}{1+4X^2-4X^2+4Y}$$ より

$$\frac{16(X^2-Y)}{1+8Y+16Y^2}=3,\quad 16X^2-16Y=48Y^2+24Y+3,\quad 16X^2=48Y^2+40Y+3.$$

$$16X^2=48\left(Y^2+\frac{5}{6}Y+\frac{25}{144}\right)-\frac{25}{3}+\frac{9}{3},\quad 48\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-16X^2=\frac{16}{3}$$

$$\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-\frac{X^2}{3}=\frac{1}{9}$$

よって、点Pの軌跡は　$\left(y+\frac{5}{12}\right)^2-\frac{x^2}{3}=\frac{1}{9}$