京大理系　1965前期　②

あるxに対して

$$kx^2-(k+2)^2x+(ak^2+4k+b)=0$$

$$kx^2-k^2x-4kx-4x+ak^2+4k+b=0$$

$$(-x+a)k^2+(x^2-4x+4)k-4x+b=0$$

が、kの値に関係なく成り立てばよく、

このとき

$$\begin{cases} -x+a=0 \\ x^2-4x+4=0 \\ -4x+b=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (x-2)^2=0,\ x=2 \\ a=2 \\ b=8 \end{array}$$ である。

よって、$a=2$, $b=8$

このとき方程式は

$$kx^2-(k+2)^2x+(2k^2+4k+8)=0$$

$(x-2)(kx-k^2-2k-4)=0$ と変形できるから、

$$\begin{array}{r|l} & kx-k^2-2k-4 \\ \hline x-2 & kx^2+(-k^2-4k-4)x+2k^2+4k+8 \\ & kx^2 \quad -2kx \\ \hline & (-k^2-2k-4)x+2k^2+4k+8 \\ & (-k^2-2k-4)x+2k^2+4k+8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

方程式の根は $x=2$, $\dfrac{k^2+2k+4}{k}=k+\dfrac{4}{k}+2$

相加平均≧相乗平均より

$k+\dfrac{4}{k}\geqq 2\sqrt{k\cdot\dfrac{4}{k}}=4$, 等号は $k=\dfrac{4}{k}$, $k^2=4$, $k=2$ のとき成り立つ

よって、他の根は $k=2$ のとき最小となる。