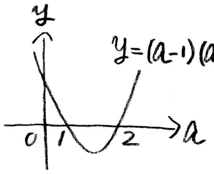
京大理系　1970前期　⑥

(イ) $x_2=\dfrac{a^2+2}{3}$ —①

$a>1$より. $\dfrac{a^2+2}{3}>1$ —②

$\dfrac{a^2+2}{3}-a=\dfrac{a^2-3a+2}{3}=\dfrac{(a-1)(a-2)}{3}$



$y=(a-1)(a-2)$のグラフは左図のようになるから

$1<a<2$より. $\dfrac{a^2+2}{3}-a<0$. $\dfrac{a^2+2}{3}<a$ —③

①②③より. $1<x_2<a$ —④

$n=k$ ($k=2,3\cdots$)のとき. $1<x_k<a$が成り立つと仮定すると.

$x_{k+1}=\dfrac{x_k^2+2}{3}$ —⑤

$x_k>1$より. $\dfrac{x_k^2+2}{3}>1$ —⑥

$x_k<a$より. $\dfrac{x_k^2+2}{3}-a<\dfrac{a^2+2}{3}-a$, 上記より. $\dfrac{a^2+2}{3}-a<0$であるから $\dfrac{x_k^2+2}{3}-a<0$. $\dfrac{x_k^2+2}{3}<a$ —⑦

⑤⑥⑦より. $1<x_{k+1}<a$ —⑧

④⑧より.数学的帰納法より　$1<x_n<a$

(ロ). $n\geqq2$のとき. $x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{3}$, $x_n-1=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{3}-1=\dfrac{x_{n-1}^2-1}{3}=\dfrac{(x_{n-1}+1)(x_{n-1}-1)}{3}$

$x_1=a$と.(イ)より$n\geqq2$のとき $x_n<a$ より. $x_{n-1}\leqq a$, $x_n-1\leqq\left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)$

(ハ) (ロ)より. $x_n-1\leqq\left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)\leqq\left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2(x_{n-2}-1)\leqq\cdots\leqq\left(\dfrac{a+1}{3}\right)^{n-1}(x_1-1)=\left(\dfrac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)$

(イ)より. $n\geqq2$のとき $x_n>1$ より. $x_n-1>0$

$\dfrac{2}{3}<\dfrac{a+1}{3}<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)=0$.

以上より. はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$