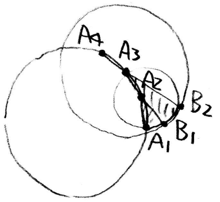
京大理系 1971前期 ⑤

(i)

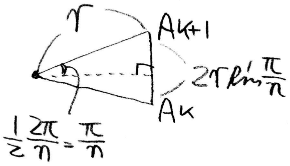


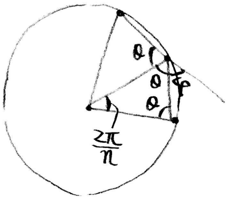
$A_{n+1}=A_1$とする

頂点 A_{k+1} $(k=1,2,\dots,n)$を中心とする半径 $A_{k+1}A_k$の円の半径を R_kとすると。

左下図より $R_{k+1}=R_k+2r\sin\frac{\pi}{n}$ 。 $R_k=R_1+(k-1)2r\sin\frac{\pi}{n}$ $(k\geqq 2)$

$R_1=2r\sin\frac{\pi}{n}$ より $R_k=2r\sin\frac{\pi}{n}\cdot k$ 、これは $k=1$のときも成り立つ





左図より $2\theta+\varphi=\pi$, $\frac{2\pi}{n}+2\theta=\pi$ 。 $\pi-\frac{2\pi}{n}+\varphi=\pi$ 。 $\varphi=\frac{2\pi}{n}$ より

扇形の中心角は $\frac{2\pi}{n}$

扇形の面積は $\pi 4r^2\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot k^2\dfrac{\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=4\pi r^2\frac{1}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot k^2$

正n角形 $A_1A_2\cdots A_n$の面積は $n\cancel{2}r\sin\frac{\pi}{n}\cdot r\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{1}{2}r^2n\sin\frac{2\pi}{n}$

よって $S_n=\frac{1}{2}r^2n\sin\frac{2\pi}{n}+4\pi r^2\frac{1}{\cancel{n}}\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{6}\cancel{n}(n+1)(2n+1)=\frac{1}{2}r^2n\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{2}{3}\pi r^2(n+1)(2n+1)\sin^2\frac{\pi}{n}$

(ii) $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\cancel{2}}r^2\cancel{n}\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{n}}\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}+\frac{2}{3}\pi^3r^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2\right\}=\pi r^2+\frac{4}{3}\pi^3r^2$