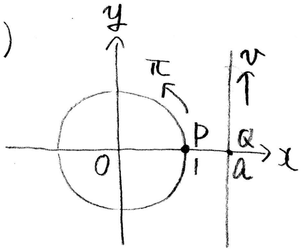
京大理系 1971前期 ⑥

(i)



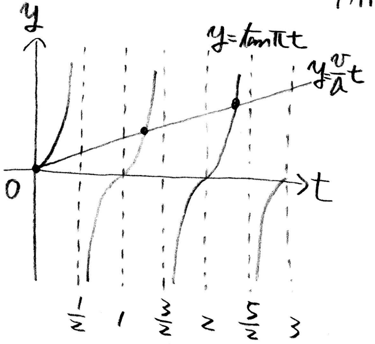
時刻tでPはπt進むから $\dfrac{2\pi}{2\pi}=\dfrac{\pi t}{\theta}$ (円周の長さ)(角度) $\theta=\pi t$より.

時刻tでのPの座標は $(\cos\pi t, \sin\pi t)$

時刻tでのQの座標は (a, vt)

O.P.Qが一直線上にならぶには $\dfrac{\sin\pi t}{\cos\pi t}=\dfrac{vt}{a}$, $\tan\pi t=\dfrac{v}{a}t$

が成立てばよい.



$f(t)=\tan\pi t$ とする

$f'(t)=\dfrac{\cos\pi t\cdot\pi\cos\pi t+\sin\pi t\cdot\sin\pi t\cdot\pi}{\cos^2\pi t}=\dfrac{\pi}{\cos^2\pi t}$. $f'(0)=\pi$. より

$y=\tan\pi t$ の$t=0$における傾きは π

$y=\dfrac{v}{a}t$の $t=0$における傾きは $\dfrac{v}{a}$

$\dfrac{v}{a}<\pi$ より $y=\tan\pi t$と$y=\dfrac{v}{a}t$ の $0\leqq t\leqq 1$ での交点は

$(0,0)$のみである —①

左上図より $y=\tan\pi t$と$y=\dfrac{v}{a}t$は $n\leqq t\leqq n+1$ $(n=1,2\cdots)$で

ただ1つの交点を持つ —②

①②より題意は示された.

(ii) $n\to\infty$のとき $t_n\to\infty$

$\tan\pi t_n=\dfrac{v}{a}t_n$ より $\tan\pi t_n\to\infty$, $t_n\to n+\dfrac{1}{2}$, $t_n-n\to\dfrac{1}{2}$