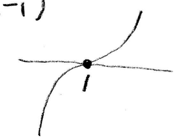
京大理系 1973前期 ②

(i) 根がすべて実数のとき

(i-i)

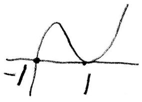


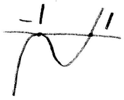
根が1のとき

方程式が $(x-1)^3=0$. $x^3-3x^2+3x-1=0$ であればよいから

$p=-3, q=3, r=-1$

(i-ii)





根が$-1, 1$のとき

方程式が $(x+1)(x-1)^2=0$. $(x+1)(x^2-2x+1)=0$. $x^3-2x^2+x+x^2-2x+1=0$. $x^3-x^2-x+1=0$

または $(x+1)^2(x-1)=0$. $(x^2+2x+1)(x-1)=0$. $x^3-x^2+2x^2-2x+x-1=0$. $x^3+x^2-x-1=0$ であればよいから

$p=-1, q=-1, r=1$ または $p=1, q=-1, r=-1$

(ii) 一根が1, 他の二根が虚数のとき

$1+p+q+r=0$. より $r=-p-q-1$ —①

$(x-1)\{x^2+(p+1)x+p+q+1\}=0$

$x^2+(p+1)x+p+q+1=0$ —②

$$
\begin{array}{r}
x^2+(p+1)x+p+q+1 \\
x-1 \,\big)\, \overline{x^3+px^2+qx-p-q-1} \\
x^3-x^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
(p+1)x^2+qx \qquad\quad \\
(p+1)x^2+(-p-1)x \qquad\quad \\
\hline
(p+q+1)x-p-q-1 \\
(p+q+1)x-p-q-1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

②が虚数解を持つとき

$(p+1)^2-4(p+q+1)<0$. $p^2+2p+1-4p-4q-4<0$. $4q>p^2-2p-3$ —③

②の虚数解を $u+vi$, $u-vi$ とする.

$u+vi+u-vi=-p-1$. $2u=-p-1$

$(u+vi)(u-vi)=p+q+1$. $u^2+v^2=p+q+1$

$u^2+v^2=1$ より $q=-p$ —④

①③④より
$$
\begin{cases}
q=-p \\
r=-1 \\
-4p>p^2-2p-3. \quad p^2+2p-3<0. \quad (p+3)(p-1)<0. \quad -3<p<1.
\end{cases}
$$

以上より $-3\leqq p\leqq 1$. $q=-p$, $r=-1$ または $p=-1$. $q=-1$, $r=1$