京大理系　1978前期　⑤

(i)　$f(x)=0$ の解を α,β,γ とする

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-m & \text{—①}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=n & \text{—②}\\ \alpha\beta\gamma=-2 & \text{—③}\end{cases}$$

$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ とすると、③より $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,-1,-1),(-2,1,1),(-1,1,2)$

$(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,-1,-1)$ のとき　$m=2+1+1=4$　$n=2+1+2=5$

$(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,1,1)$ のとき　$m=2-1-1=0$、$n=-2+1-2=-3$

$(\alpha,\beta,\gamma)=(-1,1,2)$ のとき　$m=1-1-2=-2$、$n=-1+2-2=-1$

よって $(m,n)=(4,5),(0,-3),(-2,-1)$

(ii)　α が整数とする

①より $\beta+\gamma$ も整数

②より $\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=n$ より $\beta\gamma$ も整数

③より $\alpha=-2,-1,1,2$　このとき $\beta\gamma=1,2,-2,-1$

①,②より $\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=n$,　$\alpha(-\alpha-m)+\beta\gamma=n$

$\alpha=-2$, $\beta\gamma=1$ のとき　$-2(2-m)+1=n$　$-4+2m+1=n$,　$n=2m-3$

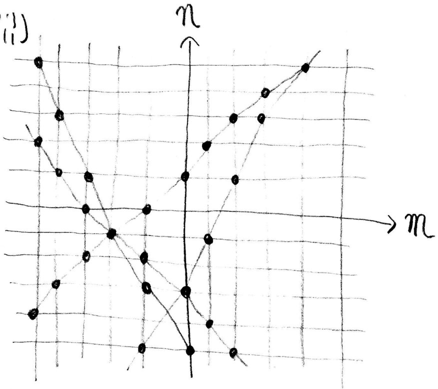
$\alpha=-1$, $\beta\gamma=2$ のとき　$-1(1-m)+2=n$　$-1+m+2=n$,　$n=m+1$

$\alpha=1$, $\beta\gamma=-2$ のとき　$-1-m-2=n$　$n=-m-3$

$\alpha=2$, $\beta\gamma=-1$ のとき　$2(-2-m)-1=n$　$-4-2m-1=n$　$n=-2m-5$

以上より $n=2m-3$ または $n=m+1$ または $n=-m-3$ または $n=-2m-5$

(iii)



左図より 26通り