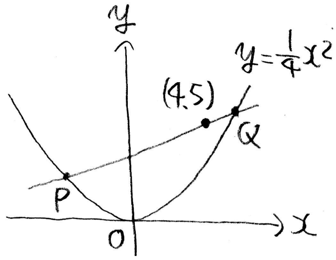
京大理系 1981前期 ①



直線の方程式は $y-5=k(x-4)$ とおける.

P, Qのx座標をp, q とおくと

これらは $x^2-4kx+16k-20=0$ の解であるから

$p+q=4k$, $pq=16k-20$

PQの長さの2乗は $(p-q)^2+\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{4}q^2\right)^2=(p+q)^2-4pq+\frac{1}{16}(p+q)^2\{(p+q)^2-4pq\}$

$=16k^2-64k+80+k^2(16k^2-64k+80)=16k^4-64k^3+96k^2-64k+80=16(k^4-4k^3+6k^2-4k+5)$

$f(k)=k^4-4k^3+6k^2-4k+5$ とおく.

$f'(k)=4k^3-12k^2+12k-4=4(k^3-3k^2+3k-1)$

$f'(k)=0$ のとき $(k-1)^3=0$. $k=1$

$$
\begin{array}{r}
k^2-2k+1 \\
k-1\,\overline{)\,k^3-3k^2+3k-1} \\
k^3-k^2 \\
\hline
-2k^2+3k \\
-2k^2+2k \\
\hline
k-1 \\
k-1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

k	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(k)$	$-$	0	$+$
$f(k)$	↘	4	↗

$f(k)$の増減表は左表のようになる

よって, 求める値は 1

※ $f(1)=1-4+6-4+5=4$

求める長さは $\sqrt{16\cdot 4}=8$