京大理系　1981前期　③

$f(x)=kx^{m+1}-x^{m}-k+1 \ (x>0)$ を考える

つねに $f(x) \geqq 0$ である

$f(x)=(kx-1)x^{m}-k+1$ であるから、$k \leqq 0$ のとき $\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$ となり つねに $f(x) \geqq 0$ とならない

よって $k>0$

$f'(x)=k(m+1)x^{m}-mx^{m-1}$, $f'(x)=0$ のとき $k(m+1)x=m$, $x=\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1$	$\nearrow$

$f(x)$ の増減表は左表のようになる

※ $f'(x)=k(m+1)\left(x-\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)x^{m-1}$

$f\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)=k\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}-\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1=\left(\frac{m}{m+1}-1\right)\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1=-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1$

$-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1 \geqq 0$ である

$g(k)=-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1 \ (k>0)$ を考える

$g'(k)=\frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m}\frac{m}{k^{m+1}}-1=\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}-1$, $g'(k)=0$ のとき $\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}=1$, $k=\frac{m}{m+1}$

k	$\cdots$	$\frac{m}{m+1}$	$\cdots$
$g'(k)$	$+$	0	$-$
$g(k)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$g(k)$ の増減表は左表のようになる

※ $g\left(\frac{m}{m+1}\right)=-\frac{1}{m+1}\left(\frac{m+1}{m}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-\frac{m}{m+1}+1=\frac{-1-m+m+1}{m+1}=0$

よって、$-\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{k}\frac{m}{m+1}\right)^{m}-k+1 \geqq 0$ となるのは $k=\frac{m}{m+1}$ のときのみである

ゆえに題意は示された。