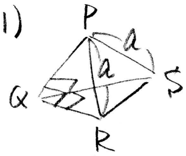
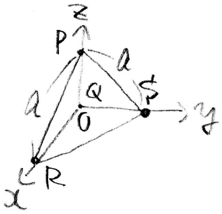
京大理系 1981前期 ④

(1)





xyz座標を考える

$\angle PQR=\angle RQS=\angle SQP=90^\circ$ より

P.Q.R.S は z軸の正の部分, 原点, x軸の正の部分, y軸の正の部分, にあるとみれる

R.S.P の座標を $(X.0.0)$ $(0.Y.0)$ $(0.0.Z)$ $(X>0.\ Y>0.\ Z>0)$ とおく

$PR=PS=a$ より $X^2+Z^2=a^2$, $Y^2+Z^2=a^2$

四面体の体積をVとすると $V=XZ\frac{1}{2}Y\frac{1}{3}=\frac{XYZ}{6}$

$$V^2=\frac{X^2Y^2Z^2}{36}=\frac{(a^2-Z^2)(a^2-Z^2)Z^2}{36}=\frac{Z^6-2a^2Z^4+a^4Z^2}{36}$$

$f(x)=x^3-2a^2x^2+a^4x$ $(0<x<a^2)$ を考える

$f'(x)=3x^2-4a^2x+a^4$, $f'(x)=0$ のとき $x=\frac{2a^2\pm\sqrt{4a^4-3a^4}}{3}=\frac{2a^2\pm a^2}{3}=\frac{a^2}{3}, a^2$

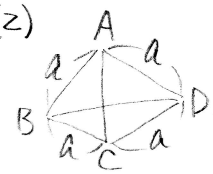
x	…	$\frac{a^2}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}a^6$	↘

$f(x)$の増減表は左表のようになる

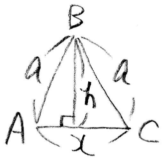
よって最大値は $\sqrt{\frac{1}{36}\frac{4}{27}a^6}=\frac{a^3}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{27}a^3$

※ $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=\frac{a^6}{27}-\frac{2a^6}{9}+\frac{a^6}{3}=\frac{1-6+9}{27}a^6=\frac{4}{27}a^6$

(2)



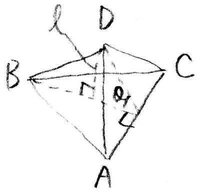
$\triangle BAC$, $\triangle DAC$ は2等辺3角形



$AC=x$ $(0<x<2a)$ とおく

左図のように h をとると $\frac{x^2}{4}+h^2=a^2$ $h=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$ であるから

$\triangle BAC$の面積は $x\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\frac{1}{2}$



$\triangle BAC$ と $\triangle DAC$ のなす角を θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおく

左図のように l をとると $\sin\theta=\frac{l}{\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}}$ $l=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\sin\theta$ であるから

四面体の体積は $x\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\sin\theta\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{6}a^2x\right)\sin\theta=\frac{1}{24}(-x^3+4a^2x)\sin\theta$ —①

$f(x)=-x^3+4a^2x$ $(0<x<2a)$ を考える

$f'(x)=-3x^2+4a^2$, $f'(x)=0$ のとき $x=\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

x	…	$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$	↘

$f(x)$の増減表は左表のようになる —②

※ $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)=-\frac{\cancelto{8}{24}\sqrt{3}}{\cancelto{9}{27}}a^3+4a^2\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{-8+24}{9}\sqrt{3}a^3=\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$

$\sin\theta$ の最大値は 1 —③

①②③より 最大値は $\frac{1}{\cancelto{3}{24}}\frac{\cancelto{2}{16}\sqrt{3}}{9}a^3=\frac{2\sqrt{3}}{27}a^3$